



TITLE:

# やわらかい壁をもつ溝の中の2次元 非定常流(ナヴィエ・ストークス方 程式の解と場の構造)

AUTHOR(S):

竹光, 信正; 松信, 八十男

---

CITATION:

竹光, 信正 ...[et al]. やわらかい壁をもつ溝の中の2次元非定常流(ナヴィエ・ストークス方程式の解と場の構造). 数理解析研究所講究録 1986, 601: 204-216

ISSUE DATE:

1986-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99608>

RIGHT:

## やわらかい壁をもつ溝の中の2次元非定常流

東京電機大 竹光信正 (Nobumasa Takemitsu)

慶大物理 松信八十男 (Yaso'o Matunobu)

### §1 緒言

一般に、生体においては、やわらかいということがその生命維持に本質的役割を果たしているのではないかと推測される。しかし、このやわらかさを数学的に式を使って表現し、これを解析することは容易ではない。そのため、やわらかい壁と流れとの相互作用を長波長近似、微小変位の仮定を使わずに取り扱った例は、これまで数少ない。<sup>(1)</sup>

この研究は、こうした観点から、血管壁のもつやわらかさの重要性に着目し、前回の研究<sup>(2)</sup>に引き続き、血管壁のもつやわらかさが、血管内の血液の流動と血管壁の運動にどのような影響を及ぼすかということを基本的に知る目的でおこなったものである。

なお、本研究においては、2次元流のみを対象とし、比較的低い Reynolds 数に限定する。

## § 2 流れの場と運動方程式

本論文で対象とする流れ場は、図1に示すように、やわらかい壁を一部にもつ2次元の薄の中の流れである。図中、斜線の部分が固定壁を表し、波線の部分がやわらかい壁を表す。

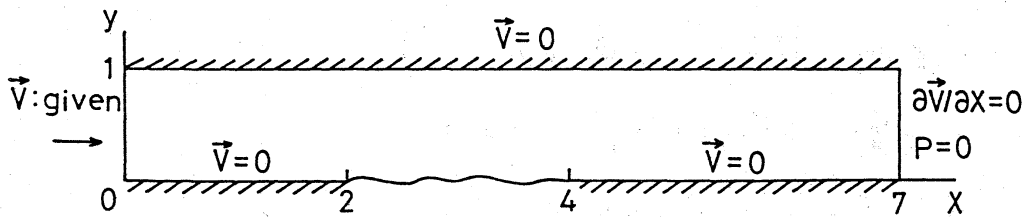


図1 流れの場

さて、流体を非圧縮粘性流体と仮定すると、無次元化した Navier-Stokes 方程式は、

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{St} \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = -\frac{1}{St} \nabla P + \frac{1}{\beta^2} \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $\vec{V}$  は速度ベクトル ( $x, y$  成分をそれぞれ  $u, v$  とする)、 $t$  は時間、 $P$  は圧力 ( $\rho U^2$  で無次元化、 $\rho$ : 流体の密度、 $U$ : 代表速度) である。この式における無次元数  $St, \beta^2$  は、流れ場の代表長さ  $L$ 、代表時間  $T$ 、代表速度  $U$ 、流体の動粘性係数  $\nu$  を使うと、

$$St = L/UT, \quad \beta^2 = St \cdot Re, \quad Re = UL/\nu \quad (2a)$$

あるいは、

$$St = \beta^2/Re, \quad \beta^2 = L^2/\nu T, \quad \alpha = \sqrt{2\pi} \beta \quad (2b)$$

と表される。St は Strouhal 数, Re は Reynolds 数,  $\alpha$  は Womersley 数である。また, 連続の方程式は, 無次元形で

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3)$$

と書ける。境界条件は,

$$\left. \begin{array}{l} \text{上流側: } \vec{V} = (u_{p0} + Q_w \cdot u_{w0}, 0) \\ \text{下流側: } \partial \vec{V} / \partial x = 0, \quad p = 0 \\ \text{固定壁面上: } \vec{V} = (0, 0) \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$u_{p0} = 6y(-y+1)$$

$$u_{w0} = \frac{\lambda (\cos \frac{\lambda}{2} \cos \lambda y + \sin \frac{\lambda}{2} \sin \lambda y - \cos \frac{\lambda}{2})}{2 \sin \frac{\lambda}{2} - \lambda \cos \frac{\lambda}{2}} \exp(2\pi i t)$$

$$\lambda = \alpha \sqrt{-i}$$

とした。ただし, パラメータ  $Q_w$  は Womersley 流による流量と Poiseuille 流による流量との比を与える。また, 複素数表現では, つねにその実部のみをとるものとする。やわらかい壁の上では,  $x, y$  方向の速度成分をそれぞれ  $u_w, v_w$  とすると,

$$u_w = 0 \quad (5a)$$

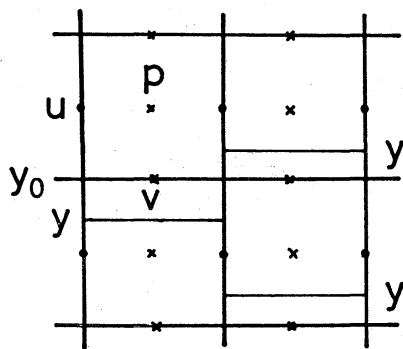
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v_w}{\partial t} = \frac{1}{St} \left[ C_T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C_V \{ P_w - (P - P_{rigid}) \} \right] \\ \frac{\partial y}{\partial t} = v_w \end{array} \right\} \quad (5b)$$

$$P_w = C_p \tan \gamma, \quad \gamma = y_0 - y, \quad y_0: \text{平衡点}$$

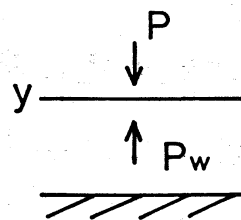
$P_{\text{rigid}}$ : 壁が剛体であるとしたときの壁面上での流体の圧力 (解析解で与える)

で与えた。ここで、 $C_T$ は無次元張力、 $C_v$ は無次元密度比、 $C_p$ は倍率を表し、一般には $\alpha$ の関数である。

すなわち、このモデルでは、壁の運動は、式(5b)の右辺第1項の張力と、右辺第2項の $\{\}$ 内で示される壁に働く外力とで決まることになる。壁に働く外力のうち、壁のもつ応力 $P_w$ として、 $\tan \gamma$ の関数形を導入したことは、 $\gamma$ が大きくなると $P_w$ が急激に大きくなり、式(5b)の $\partial w / \partial t$ の符号が変化し、壁の運動を制御していることになる(図2)。



(a)



(b)

図2 壁の運動とその制御

以上で、流体の運動と壁の運動は、パラメータを決め、初期条件を与えると、完全に決定されることになる。そこで、

流れ場を図3のように格子分割する。

本論文においては，すべて空間の格子幅  $h$ ，および  $\Delta$  は  $h = \Delta = 1/10$ ，時間刻み  $\Delta t$  は  $\Delta t = 1/100$  とした．方程式 (1), (3), (5) の離散化，

および計算方法の詳細については，文献(3)を参照されたい．また，パラメータ  $C_r, C_v, C_p$  は， $C_r = 1/100$ ， $C_v = 1/50$ ， $C_p = 100$  と選んだ．

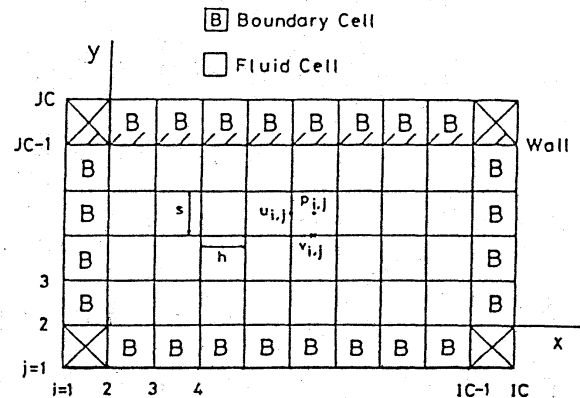


図3 流れ場の格子分割

### §3 計算結果

#### (a) 上流側が定常流の場合

この場合には，Strouhal 数  $St = 1$ ，Reynolds 数  $Re = 50$  とし，初期条件を  $t < 0$  でいたるところで

$$\vec{V} = (u_{p0}, 0), \quad \partial p / \partial x = -12 / Re^{(0)}$$

で与えた．ここで， $Re^{(0)}$  は初期値の  $Re$  数で，この値を変えることによ，て流れ場に与えるかく乱の大きさを変化させる．

$t = \Delta t$  以後は， $Re = 50$ ， $St = 1$ ， $Q_w = 0$  (式(4))の計算をおこなう．

図4は，計算された流れ場全体の一例 ( $Re^{(0)} = 0.5$ ) を示す．

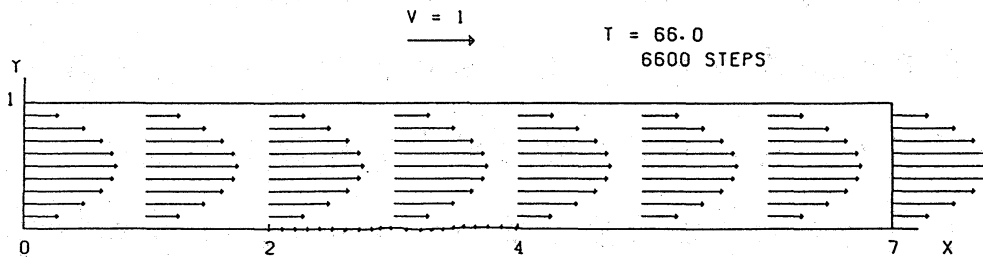


図4 流れ模様の一例

この図に代表されるように，流れ場は各時間ステップで正しく求ま，ている。

図5aは， $Re^{(0)} = 0.5$ のときの壁の変位の時間的变化を示す。横軸が時間で縦軸が壁の変位である。壁の変位の時間的平均の位置は，図にみられるように $y = 0$ である。この図から，

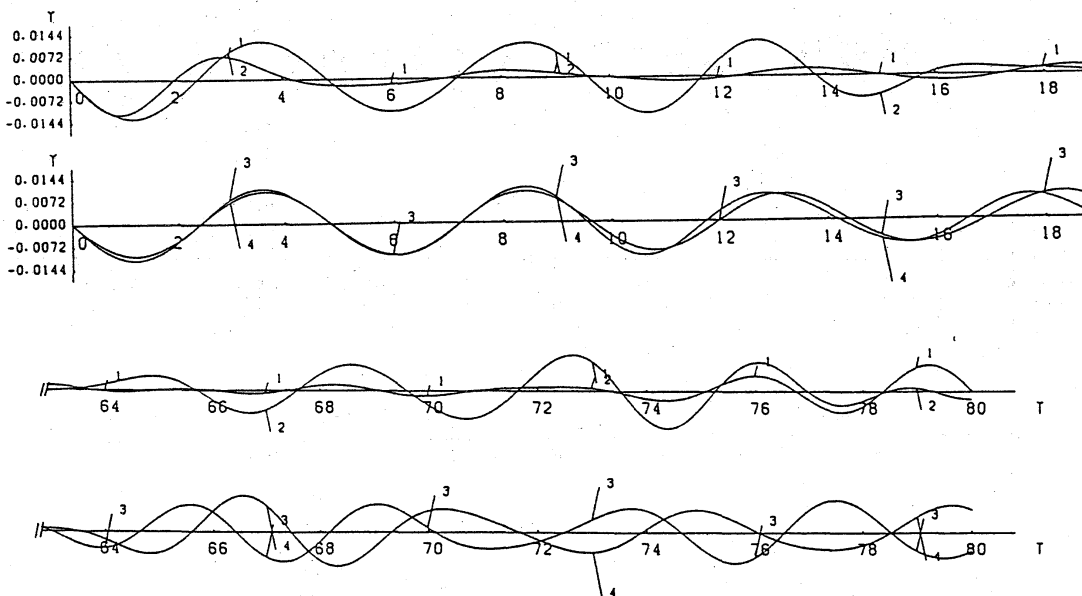


図5a 壁の変位の時間的变化 ( $Re^{(0)} = 0.5$ )

1:  $x = 2.05$ , 2:  $2.55$ , 3:  $3.05$ , 4:  $3.55$

壁の変位は、時間  $t$  が小さいときから、ほぼ壁のもつ固有振動数の周期（いまの場合、壁の変位が小さいとして張力の項を無視すると、式 (5b) から壁の固有振動数の周期は、 $2\pi/\sqrt{C_v C_p} = 4.44$  となる）で振動を繰り返す。しかし、この振動は、たとえば  $x=2.05$  の位置の壁の変位に顕著にみられるように完全に周期的とはいえない。また、時間が十分経過しても壁の振動は減衰することはない。なお、 $Re^{(0)}$  を大きくすると壁の変位は小さくなる。

図 5b は、 $Re^{(0)}=0.5$  のときの  $x=1.95$  と  $x=4.05$  における平均の圧力降下  $\Delta P$  の時間的变化を示し、図 5a と対応する。横軸が時間で縦軸が平均の圧力降下  $\Delta P$  である。平均の圧力降下の時間的变化は、壁の変位の時間的变化と異なり、 $t$  が小さいとき、初期値の  $Re$  数  $Re^{(0)}$  の大きさに応じて大きな圧力変

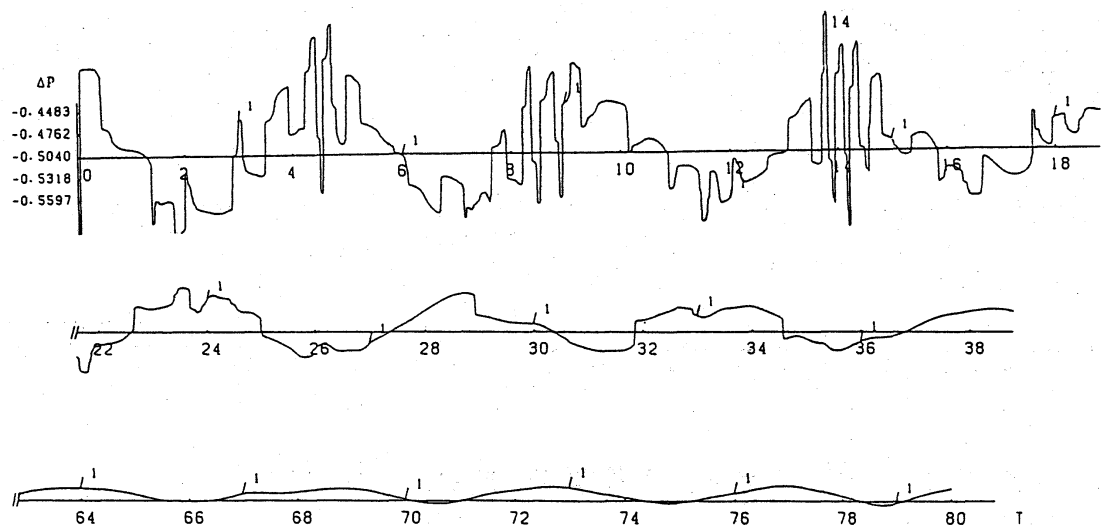


図 5b 平均の圧力降下の時間的变化：1 ( $Re^{(0)}=0.5$ )



動を生じ、時間の経過にともなう、壁のもつ固有振動数の周期とほぼ等しい周期で振動を繰り返す。図中の原点  $-0.504$  は、壁が剛体壁であるとしたときの平均の圧力降下である。したがって、上流側が定常流の場合、時間が十分たつと、平均の圧力降下は、壁がやわらかいときの方が剛体壁に比較して小さくなることかわかる。このことは、 $Re^{(0)}$  を変えても同様になり立つ (図 6)。

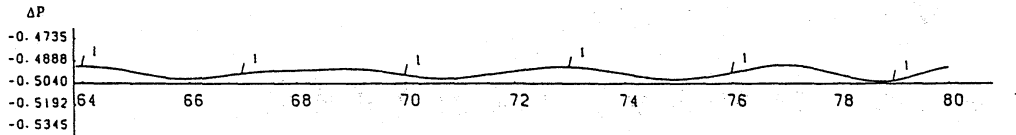


図 6 平均の圧力降下の時間的变化 ( $Re^{(0)}=1$ )

そこで、計算で得られた波形を Fourier 分解し、 $\cos$  成分と  $\sin$  成分の主要項のみを考慮して

$$\left. \begin{aligned} P &= P_0 + A_p \cos(4t + \alpha_p) \\ \eta &= \eta_0 + A_\eta \cos(4t + \alpha_\eta) \end{aligned} \right\} (6)$$

と表すと、 $A_p$  と  $A_\eta$  の関係は図 7 のようになる。この図から、壁の変位が大きくなると平均の圧力降下も大きくなることかわかる。このことは、生理流体力学的にみると重要な意味をもっていると考えら

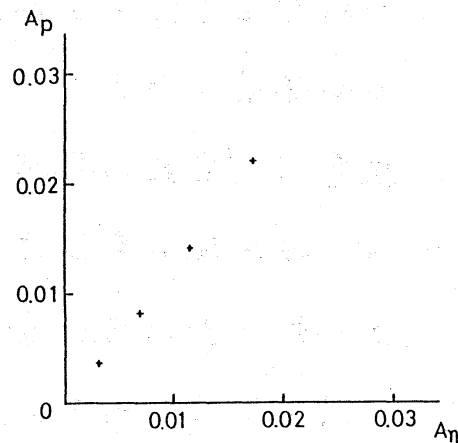


図 7 壁の変位の振幅と平均の圧力降下の振幅との関係

る。すなわち、血管壁がやわらかくて変位が大きいほど、血液は流れやすくなり、毛細血管にまでゆきわたることを示している。

(b) 上流側が拍動流の場合

この場合には、Reynolds 数  $Re$  と Womersley 数  $\alpha$  をそれぞれ  $Re=50$ ,  $\alpha=8$  とし、初期条件を  $t < 0$  でいたるところで

$$\vec{V} = (0, 0), \quad P = 0$$

で与えた。  $t = \Delta t$  以後、上流側の速度を

$$\vec{V} = (u_{po} + Q_w \cdot u_{wo}, 0)$$

で与える。他の条件は、(a) の場合と同じである。

図 8 a は、拍動流の基本周期を 1,  $Q_w = 0.1$  としたときの平均の圧力降下の時間的变化である。図中、Analytic は、壁が剛体壁であるとしたときの解析解で、得られた結果との位相差は、流れの非線形効果によるものと思われる。この図から、拍動流の基本周期が 1 のときは、平均の圧力降下は、壁がやわらかい方が剛体壁の場合より大きくなることがわかる。

図 8 b は、図 8 a に対応する壁の変位の時間的变化である。この波形を Fourier 分解して、その振動数を調べてみると、

$$1 - 0.1111 n, \quad n: \text{整数}$$

の形をしている。  $1/0.1111 \approx 9$  であるから、この波形は、拍動

流の基本周期の波と、壁のもつ固有振動数の周期の波とが干渉を起こしているものと推測できる。

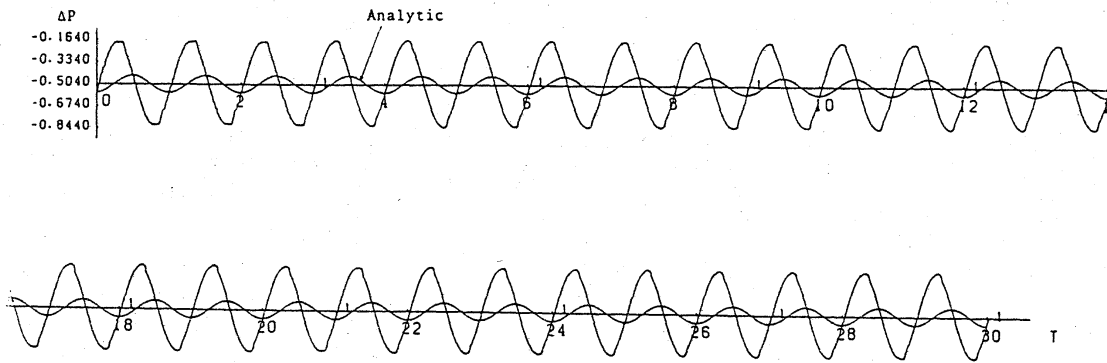


図 8 a 平均の圧力降下の時間的変化：1

(基本周期 1,  $Q_w = 0.1$ )

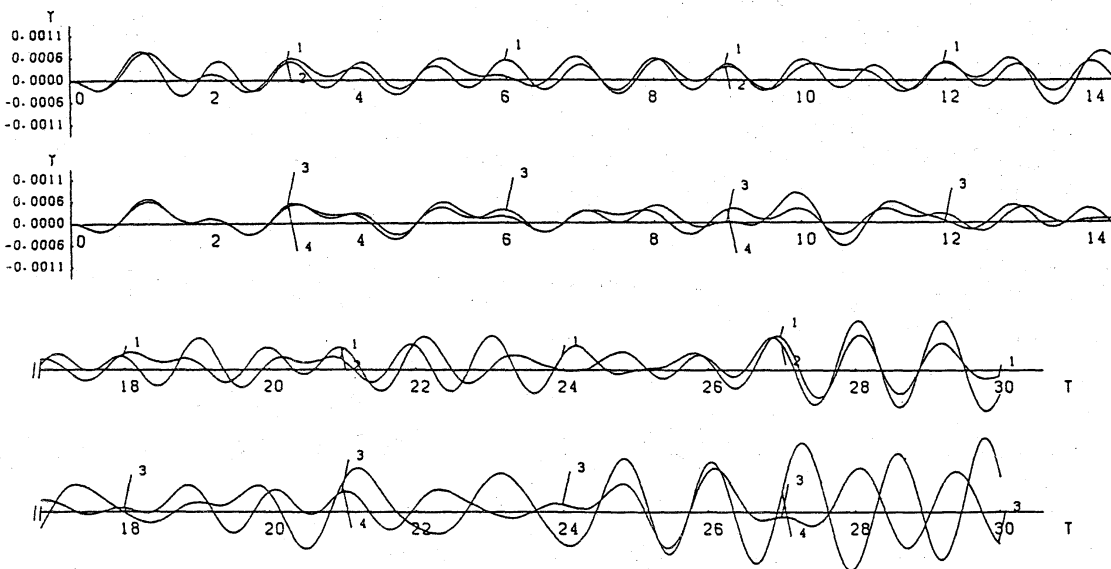


図 8 b 壁の変位の時間的変化 (基本周期 1,  $Q_w = 0.1$ )

1 :  $x = 2.05$ , 2 : 2.55, 3 : 3.05, 4 : 3.55

図9 a は、拍動流の基本周期を2,  $Q_w=0.1$ としたときの平均の圧力降下の時間的变化である。拍動流の基本周期が1の場合と比較して、壁がやわらかい方が剛体壁の場合に比べて、

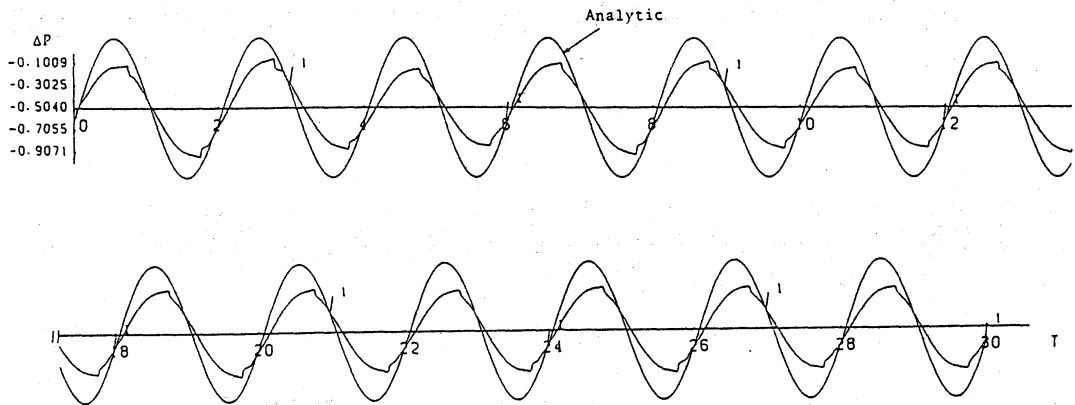


図9 a 平均の圧力降下の時間的变化: 1  
(基本周期2,  $Q_w=0.1$ )

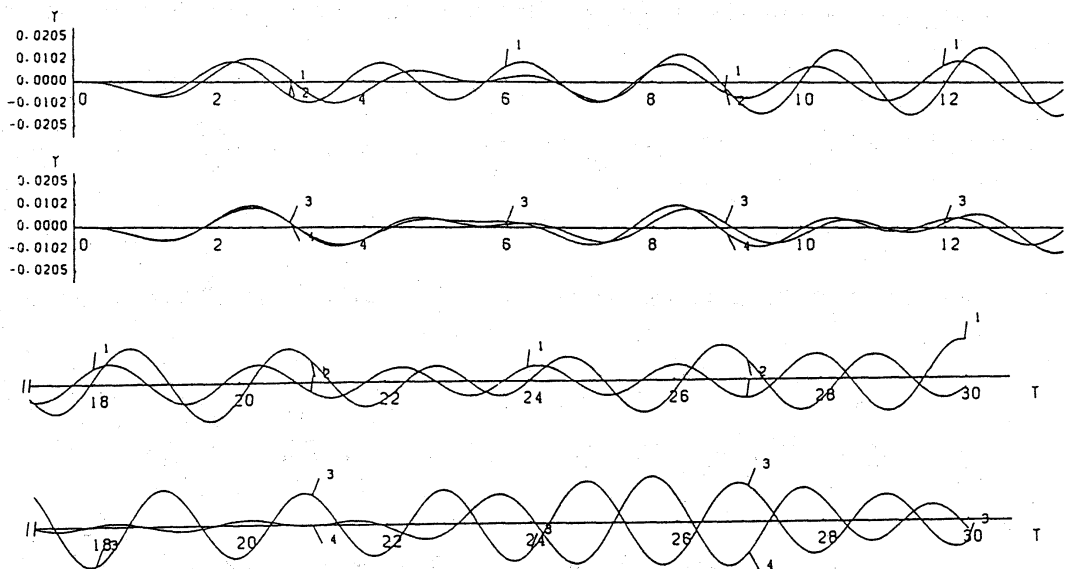


図9 b 壁の変位の時間的变化 (基本周期2,  $Q_w=0.1$ )

1:  $x=2.05$ , 2:  $2.55$ , 3:  $3.05$ , 4:  $3.55$

平均の圧力降下は小さくなっている。したがって、拍動流の周期がゆっくりすると、平均の圧力降下は、やわらかい壁の方が剛体壁より小さくなると推測できる。

図 9 b は、図 9 a に対応する壁の変位の時間的变化である。波形を Fourier 分解すると、その振動数は、

$$0.5 \pm 0.125 n, \quad n: \text{整数}$$

となる。  $1/0.125 = 8$  であるから、この場合も拍動流の基本周期の波と壁のもつ固有振動数の周期の波が干渉しているものと考えられる。

#### § 4 結言

本研究の結果から、以下のことが結論できる。

(1) 上流側が定常流の場合、やわらかい壁の部分は、壁の張力が小さければ、ほぼ壁のもつ固有振動数の周期で振動する。この振動に呼応して、やわらかい壁の前後の平均の圧力降下も同じ周期で振動するが、壁がやわらかいときの方が剛体壁の場合に比べて、平均の圧力降下は小さくなる。このことは、生理流体力学的にみると、壁のもつやわらかさが血液を流しやすくしていると考えられる。

(2) 上流側が拍動流の場合、やわらかい壁の部分は、壁のもつ固有振動数の周期の波と、拍動流の周期の波とが干渉を

起こす。また、拍動流の基本周期が1のときは、やわらかい壁の前後の平均の圧力降下は、壁がやわらかい方が剛体壁の場合に比べて大きい。基本周期が2のときは逆になる。このことは、生理流体力学的にみると、脈搏が高くなると血液は流れにくくなって、生体に悪影響を及ぼすものと推測される。

### [ 謝 辞 ]

本研究をすすめるにあたり、慶応義塾大学物理教室川口光年教授より数々の御助言を賜りました。また、壁の運動方程式の張力の項につき、名古屋大学桑原真二教授、および宇宙科学研究所桑原邦郎教授より御教示を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。

### § 5 参考文献

- (1) B. J. Daly, in "Lecture Notes in Physics" (A. I. Vooren and P. J. Zandbergen Ed.), P. 153, Springer-Verlag, 1976.
- (2) 竹光信正, 松信八十男, 数理解析所講究録 539 (1984), p. 256.
- (3) 竹光信正, 松信八十男, ながれ, vol. 5, No. 3 (1986), 掲載予定.